L'équation d'Hamilton-Jacobi indépendante du temps

L'équation aux dérivées partielles

$$\boxed{H\left(q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial f}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial q_n}, \cancel{t}\right) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0}$$

est l'équation d'Hamilton-Jacobi pour $f(q_1, \ldots, q_n, t)$

$$f(q_1, \ldots, q_n, t) = S(q_1, \ldots, q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n; t) + \alpha_{n+1}$$

$$S(q_1, \ldots, q_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n; t) = W(q_1, \ldots, q_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n) - \alpha_1 t.$$

$$\boxed{H\left(q_1, \ldots, q_n; \frac{\partial W}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) = \alpha_1}$$

Equation caractéristique d'Hamilton-Jacobi

L'équation caractéristique d'Hamilton-Jacobi

$$\boxed{H\left(q_1, \ldots, q_n; \frac{\partial W}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) = \alpha_1}$$

Cette équation est appelée l'*équation caractéristique de Hamilton-Jacobi.* On peut simplement l'utiliser pour calculer S. Mais on peut également utiliser W pour faire une transformation canonique :

$$F_2(q_1, \ldots, q_n; P_1, \ldots, P_n \cancel{; t}) = W(q_1, \ldots, q_n; \alpha_1{=}P_1, \ldots, \alpha_n{=}P_n).$$

$$\begin{cases} p_i = \dfrac{\partial W}{\partial q_i} \\ Q_i = \dfrac{\partial W}{\partial P_i} \\ K(Q_1, \ldots, Q_n, P_1, \ldots, P_n) = P_1 \end{cases}$$

- K=H, puisque $F_2(q_i,P_i;t)=F_2(q_i,P_i)$
- Les variables Q_i sont cycliques

$$\dot{P}_i = 0, \qquad i = 1, \ldots, n$$

- Les variables $P_{i=2,\ldots n}$ sont cycliques

$$\dot{Q}_i = 0, \qquad i = 2, \ldots, n$$

- Finalement

$$Q_1 = t + Q_1^0$$

L'équation d'Hamilton-Jacobi - résumé

L'équation aux dérivées partielles

$$\boxed{H\left(q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial f}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial q_n}, t\right) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0}$$

est l'équation d'Hamilton-Jacobi pour $f(q_1, \ldots, q_n, t)$

- n+1 dérivées partielles -> n+1 constantes d'intégration dans la solution
- f apparaît uniquement en dérivées et donc f+const. est une solution.

La solution générale, si elle existe, s'écrit

$$f(q_1, \ldots, q_n, t) = S(q_1, \ldots, q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n; t) + \alpha_{n+1}$$

On résout le problème initial en considérant la fonction génératrice

$$F_2(q_1, \ldots, q_n, P_1, \ldots, P_n; t) \equiv S(q_1, \ldots, q_n, \alpha_1{=}P_1, \ldots, \alpha_n{=}P_n; t)$$

C'est-à-dire : constantes d'intégration -> nouvelles coordonnées

-> intégrales du mouvement

Hamilton-Jacobi - méthodologie

Le formalisme d'Hamilton-Jacobi est basé partiellement sur l'existence de constantes d'intégration, auxquelles on identifie ensuite les nouvelles variables P_i résultant de la transformation canonique associée à la solution.

$$H\left(\{q_i\},\{p_i\},t\right) \qquad\qquad K\left(\{Q_i\},\{P_i\},t\right)$$

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \underset{\xleftarrow{\text{transf. canonique inverse dépendant de t}}}{\xrightarrow{\text{trans. canonique dépendant de t}}} \begin{cases} \dot{Q}_i = 0 \\ \dot{P}_i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_i(t) = Q_i(0) \\ P_i(t) = P_i(0) \end{cases}$$

Donc, on a en effet caché l'évolution temporelle du système dans la fonction génératrice, donc dans la transf. canonique. Ce n'est pas surprenant, car on sait que l'évolution du système est une transformation canonique.

On fait un pas en arrière pour discuter les conséquences de ce que l'on a fait.
Si on peut résoudre Hamilton-Jacobi, c'est à dire trouver S, alors il suffit de cacluler Q_i et P_i à $t = 0$, et en sachant qu'ils ne changent pas au cours du temps, par inversion de la transformation on trouve explicitement $q_i(t)$ et $p_i(t)$. On dit qu'on a résolu explicitement le système.

Hamilton-Jacobi - méthodologie

Le formalisme d'Hamilton-Jacobi est basé partiellement sur l'existence de constantes d'intégration, auxquelles on identifie ensuite les nouvelles variables P_i résultant de la transformation canonique associée à la solution.

$$H(\{q_i\},\{p_i\},t) \quad \begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{trans. canonique dépendant de t}} \\ \xleftarrow{\text{transf. canonique inverse dépendant de t}} \end{array} \quad K(\{Q_i\},\{P_i\},t) \quad \begin{cases} \dot{Q}_i = 0 \\ \dot{P}_i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_i(t) = Q_i(0) \\ P_i(t) = P_i(0) \end{cases}$$

D'un autre coté, la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles dit que pour résoudre Hamilton-Jacobi, il est nécessaire d'avoir $3N$ constantes du mouvement. Alors on peut trouver une solution explicite du mouvement (c'est à dire : $q_i(t)$ et $p_i(t)$ explicite) si et seulement si il existe au moins $3N$ constantes du mouvement. Si elles n'existent pas, alors on ne peut pas avoir une solution explicite.

Attention ! La solution des équations canoniques existe et elle est unique, car $\{q_i(0)\}$ et $\{p_i(0)\}$ sont connues. Tout simplement, on ne peut pas écrire une forme explicite

$$\begin{cases} q_i(t) = q_i(\{q_i(0)\},\{p_i(0)\},t) \\ p_i(t) = p_i(\{q_i(0)\},\{p_i(0)\},t) \end{cases} \tag{614}$$

La conséquence est qu'on devra utiliser des solutions numériques.

Séparation des variables et équation d'Hamilton-Jacobi

L'équation d'Hamilton-Jacobi est une équation aux dérivées partielles

Une méthode de résolution est par séparation des variables - ce qui marche bien pour des systèmes dits séparables

Définition : une variable q_1 est dite séparable si on peut chercher la solution de l'équation de Hamilton-Jacobi sous la forme :

$$f(q_1, \ldots, q_n; t) = f_1(q_1) + f'(q_2, \ldots, q_n; t). \tag{3.38}$$

Ce sera en particulier le cas si q_1 et $\frac{\partial f}{\partial q_1}$ n'apparaissent dans l'équation de Hamilton-Jacobi que par l'intermédiaire d'une expression $\phi_1\left(q_1, \frac{\partial f}{\partial q_1}\right)$ qui ne fait pas intervenir les autres variables ou les autres dérivées partielles. L'équation de Hamilton-Jacobi s'écrit en effet

$$H_1\left(\phi_1\left(q_1, \frac{\partial f}{\partial q_1}\right), q_2, \ldots, q_n; \frac{\partial f}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial q_n}\right) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{l} H_1\left(\alpha_1, q_2, \ldots, q_n; \dfrac{\partial f'}{\partial q_2}, \ldots, \dfrac{\partial f'}{\partial q_n}\right) + \dfrac{\partial f'}{\partial t} = 0 \\ \phi_1\left(q_1, \dfrac{\mathrm{d} f_1}{\mathrm{d} q_1}\right) = \alpha_1 \end{array} \right.$$

Séparation des variables et équation d'Hamilton-Jacobi

L'équation d'Hamilton-Jacobi est une équation aux dérivées partielles

Une méthode de résolution est par séparation des variables - ce qui marche bien pour des systèmes dits séparables

Un système est dit *complètement séparable* si de proche en proche on peut séparer toutes les variables. On a alors :

$$\begin{aligned} f(q_1, \ldots, q_n; t) &= \sum_{k=1}^{n} f_k(q_k; \alpha_1, \ldots, \alpha_n) + f_0(t) \qquad (3.39) \\ \text{avec} \quad \phi_k\left(q_k, \frac{\mathrm{d} f_k}{\mathrm{d} q_k}\right) &= \alpha_k \end{aligned}$$

$$f_0(t) = -H_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)t \equiv -E(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)t$$

Si H ne dépend pas
Explicitement de t

La fonction $S(q_1, \ldots, q_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n, t)$ qui permet de faire la transformation canonique est de la forme

$$S(q_1, \ldots, q_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n, t) = \sum_{k=1}^{n} S_k(q_k; \alpha_1, \ldots, \alpha_n, t) + S_0(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, t).$$

Intégrabilité

Le formalisme d'Hamilton-Jacobi est basé partiellement sur l'existence de constantes d'intégration, auxquelles on identifie ensuite les nouvelles variables P_i résultant de la transformation canonique associée à la solution.

Ces P_i sont donc des intégrales du mouvement.

Lorsque un systéme possède suffisamment d'intégrales du mouvement, on dit qu'il est *intégrable :*

Déf.: Un système Hamiltonian à n degré de liberté est dit intégrable s'il possède n constantes du mouvement en involution, c'est-à-dire

$$\exists G_i, \qquad i = 1, \ldots n \qquad (1) \quad \frac{\partial G_i}{\partial t} + \{G_i, H\} = 0$$

$$(2) \quad \{G_i, G_j\} = 0 \qquad \forall i, j = 1, \ldots n$$